EL TEST BDS: POSIBLES LIMITACIONES

Mariano Matilla García

Julián Rodríguez Ruiz

Basilio Sanz Carnero

Departamento de Economía Aplicada Cuantitativa

Universidad Nacional de Educación a Distancia. UNED.

Resumen:

El test BDS (1987) ha alcanzado un nivel de uso tan elevado que ha sido primeramente publicado en 1996, y, finalmente, elevado a formar parte de uno de los test que incorpora el difundido paquete informático conocido como E-views, en particular, en el caso de la última versión (Versión 4.0).

Anticipándonos a lo que esto puede suponer, pretendemos asentar con la mayor claridad y simplicidad posible, los cometidos fundamentales del test BDS. En primer lugar, pretendemos en esta nota mostrar sus fundamentos, y sus limitaciones. Apuntamos, igualmente, algún atractor no detectado por el test, así como el uso sistemático y detallado del proceso a seguir para ejecutar el test. A lo largo del trabajo se exponen algunos criterios de elección de los parámetros principales.

Las conclusiones fundamentales son, por un lado, que no es un test de caos determinista, y por otro, que es un test con poder para detectar estructura no lineal, tanto determinista como estocástica. Finalmente, se dan los resultados de aplicar el test original a varios atractores caóticos suficientemente conocidos.

Palabras clave: Test BDS, Caos, No Linealidad, Test No Paramétricos, Eviews 4.0, Independencia

1. INTRODUCCIÓN.

El test BDS (1987) ha alcanzado un nivel de uso tan elevado que ha sido primeramente publicado (1996) y finalmente elevado a formar parte de uno de los test que incorpora el difundido paquete informático conocido como Eviews (2001), en particular, en el caso de la última versión (Versión 4.0).

Anticipándonos a lo que esto puede suponer, pretendemos asentar con la mayor claridad y simplicidad posible, los cometidos fundamentales del test BDS. En primer lugar, pretendemos en esta nota mostrar sus fundamentos, y sus limitaciones. Apuntamos, igualmente, algún error ya detectado, así como el uso sistemático y detallado del proceso de ejecución del test. A lo largo del trabajo se exponen algunos criterios de elección de los parámetros principales.

Las conclusiones fundamentales son, por un lado, que no es un test de caos determinista, y por otro, que es un test con poder para detectar estructura no lineal, tanto determinista como estocástica. Finalmente, se dan los resultados de aplicar el test original a varios atractores caóticos suficientemente conocidos.

2. TEST BDS.

2.1. Hipótesis Nula del Test

En general, el test BDS (desarrollado por Brock, Dechert y Scheinkmann en 1987, e implementado en 1996 junto con LeBaron) es un test estadístico sobre la hipótesis nula de que una determinada serie temporal es Independiente e Idénticamente Distribuida (i.e, i.i.d.), frente a la alternativa de no ser i.i.d.

Consideremos que x es una serie temporal compuesta por un número finito de observaciones que siguen *alguna* función de distribución $\boldsymbol{F}$:

$$x \sim F \qquad (1)$$

Elijamos una distancia $\boldsymbol{e}$ de modo que:

$$o < \boldsymbol{e} < \max(x) - \min(x) \qquad (2)$$

Dadas dos observaciones x_i y x_j, consideremos la probabilidad de que no disten entre sí más de e:

$$P_1 \equiv P\left(\left|x_i - x_j\right| \leq e\right),\ i \neq j,\ i,\ j \in \mathbf{N} \tag{3}$$

Una relación similar en dimensión dos puede ser definida para cualesquiera dos observaciones y las respectivas que las preceden inmediatamente. En este caso la probabilidad de "cercanía" puede considerarse como la probabilidad de que dos observaciones estén "próximas" una de la otra, así como que sus dos predecesoras estén también cerca una de la otra, es decir:

$$P_2 \equiv P\left(\left|x_i - x_j\right| \leq e,\ \left|x_{i-1} - x_{j-1}\right| \leq e\right),\ i \neq j,\ i,\ j \in \mathbf{N} \tag{4}$$

Ambas probabilidades (3) y (4) son distintas, sin embargo bajo la hipótesis nula del BDS, si la serie temporal es i.i.d., entonces podemos establecer una relación entre las dos: la probabilidad de que una observación de dos historias esté "cerca" es igual al cuadrado de la probabilidad de que dos observaciones estén "cerca":

$$P_2 = P_1^2,\ \text{ si } x \sim F(i.i.d.) \tag{5}$$

Esta relación de potencia es generalizable para cualquier dimensión, de modo que el test BDS para una dimensión m se convierte en un test de la hipótesis nula de que las probabilidades para la dimensión 1 y m sean iguales:

$$H_0 : P_m = P_1^m\ ;\ H_1 : P_m \neq P_1^m \tag{6}$$

Este test sobre la hipótesis nula es casi equivalente a un test sobre i.i.d. contra todas las otras posibles alternativas:

$$H_0 : x \sim F(i.i.d) \tag{7}$$

La cuestión principal es cómo obtener la probabilidad P_m, para ello se utiliza una medida desarrollada por Grassberger y Procaccia en 1983 (1983 a, 1983 b) conocida como integral de correlación $c_{m,n}(e)$ en un espacio finito.

2.2. Integral de correlación.

Sea *H* la función de Heavyside, de modo que la variable $H_e(x_i, x_j)$ toma el valor 1 si las dos observaciones , j-ésima e i-ésima de las serie están dentro de la distancia e , en caso contrario tomaría valor 0, es decir:

$$H_e = \begin{cases} 1 \text{ si } \left| x_i - x_j \right| \leq e \\ 0 \quad \text{caso contrario} \end{cases} \tag{8}$$

Sobre una serie de *n* observaciones, esto es, $\{x_n\}_{n=1}^{n}$, podemos analizar historias de m elementos de la serie, es decir, $\{x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m-1}\}$ que formaría una *m-historia*, de modo que la *integral de correlación* para una dimensión m es calculada como la media de todos los posibles productos de *m-hitorias*:

$$c_{m,n}(e) \equiv \frac{2}{(n-m+1)(n-m)} \sum_{s=1}^{n-m} \sum_{t=s+1}^{n-m+1} \prod_{j=0}^{m-1} H_e(x_{s+j}, x_{t+j}) \tag{9}$$

Bajo el supuesto de la hipótesis nula, y habida cuenta de que la integral de correlación se ha utilizado como la probabilidad para las m-historias, se plantea que bajo dicha hipótesis, se verificaría lo siguiente:

$$c_m(e) = c_1(e)^m, \text{ donde } c_m(e) \equiv \lim_{n \to \infty} c_{m,n}(e) \qquad (10)[1]$$

Se puede demostrar (Brock, 1996), que dado que la integral de correlación es un estadístico *U* generalizado (ver Serfling 1980), el estadístico BDS para una dimensión de inmersión *m* y para una distancia e es un estimador consistentemente sobre un número *n* de observaciones, viene dado por:

$$w_{m,n}(e) = \sqrt{n-m+1}\, \frac{c_{m,n}(e) - c_{1,n-m+1}(e)^m}{s_{m,\, n-m+1}(e)} \tag{11}$$

Donde la estimación de la varianza de $c_{m,n}(e) - c_{1,n-m+1}(e)^m$ es la siguiente:

$$s_{m,\, n-m+1}(e) = 4\left\{k^m + 2\sum_{j=1}^{m-1} k^{m-j} c^{2j} + (m-1)^2 c^{2m} - m^2 k c^{2m-2}\right\} \tag{12}$$

[1] Este límite existe bajo las condiciones de la hipótesis nula, junto con el supuesto de que el proceso generador de datos sea estocástico estrictamente estacionario (ver Brock 1996)

El parámetro c es la integral de correlación de primera dimensión:

$$c \equiv c_{1,n}(\boldsymbol{e}) \tag{13}$$

El parámetro k es la probabilidad de una terna de observaciones estén dentro de una distancia ε entre ellas, se puede computar del siguiente modo:

$$k_n(\boldsymbol{e}) \equiv \frac{2}{n(n-1)(n-2)} \sum_{t=1}^{n} \sum_{s=t+1}^{n} \sum_{r=s+1}^{n} \left\{ \begin{array}{l} H_e(x_t, x_s) H_e(x_s, x_r) + H_e(x_t, x_r) H_e(x_r, x_s) \\ + H_e(x_s, x_t) H_e(x_t, x_r) \end{array} \right\} \tag{14}$$

Finalmente, se muestra como el estadístico BDS sigue asintóticamente una distribución normal (ver de Lima 1992):

$$\lim_{n\to\infty} w_{m,n}(e) \;\; \mathrm{N}(0,1),\ \forall\, m>1,\ \forall\, e \tag{15}$$

2.3. Método de empleo del test BDS

En principio, el modo de ejecución del test sería el siguiente:

1. Fijar el parámetro de distancia ε así como la dimensión de las m-historias, es decir, m.
2. Computar $c_{1,n}$ y k_n , de acuerdo con (9) y (14).
3. Calcular, a partir de dichos valores, la varianza estimada (12).
4. Calcular $c_{1,n-m+1}$ junto con $c_{m,n}$ con (9)
5. Computar, con los datos ya obtenidos, el estadístico BDS ($w_{m,n}$)
6. Evaluar el valor obtenido con la *N(0,1)*.

Los test que computan el BDS realizan las etapas 2 a 5, estos programas suelen tener la desventaja de consumir mucha memoria, y arrojar unos tiempos de computación bastante elevados. Como quiera que sea, el investigador tiene que decidir los valores de la distancia ε y la dimensión de las m-historias.

Resulta particularmente importante la elección de ε. Destacamos tres aspectos generales a tener en consideración:

i) Se suelen tomar múltiplos de la desviación estándar de la serie analizada, suelen ser 0.5, 1, 1,5 y 2 veces la misma[2]

[2] Notar la restricción mantenida en 2.

ii) Si consideramos que la serie con la que se trabaja está contaminada por ruido distribuido uniformemente sobre el intervalo [-a,a], entonces:

- Si ε<a, teóricamente tendríamos que el test BDS estaría siendo realizado sobre un proceso puramente aleatorio.
- Si ε>a, teóricamente podríamos detectar si se verifica o no el supuesto de i.i.d[3]

iii) Para saber si hay o no ruido que distorsione la serie, se propone realizar el test para distintos ε, de manera que si conforme aumentamos el ε, el test BDS deja de rechazar la hipótesis nula, entonces podría ser una evidencia de la presencia de ruido en la serie original.

La metodología sugerida por Brock (1986) consiste en realizar el test sobre los residuos de la serie ajustada con el mejor retardo de un proceso autorregresivo. De este modo, se plantea este test como un metódo indirecto de analizar la no linealidad. Para comprender esto supongamos que nuestra serie original ha sido filtrada de modo que toda la parte lineal de la misma haya sido eliminada (esto se ha hecho con el mejor ajuste posible a AR(*p*)). En tal caso, los residuos del ajuste, supuestamente liberados de cualquier estructura lineal, se convertirían en los datos sobre los que se realizaría el test. De modo que si el test rechazara la hipótesis nula, dado el tipo de datos sobre los que ahora trabajamos, tan solo nos quedaría que la estructura "no i.i.d." sería no lineal.

Este procedimiento es teóricamente viable ya que los cálculos sobre los residuos de un AR(*p*) no pierden la información importante derivada de la serie original, si es que ésta última proviniera de un sistema no lineal caótico:

Teorema (Brock, 1986): Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, una serie de datos que son deterministas y caóticos, adaptemos dicha serie a un AR(*p*) con p finito; entonces, en general, la dimensión de correlación y el exponente de Lyapunov[4] de $\{x_n\}$ y $\{e_n\}$ son iguales.

[3] En este caso, la estimación de la dimensión de correlación a partir de las pendientes de la integral de correlación, arrojarían la dimensión real del supuesto atractor caótico, siempre que m>2d+1, donde d es la dimensión del subespacio que contiene al mismo atractor (ver Grassberger y Procaccia, 1983 a, 1983 b; Takens, 1981; Brock, 1986).

[4] Aunque puede seguirse la lectura sin necesidad de entrar en los términos (exponente de Lyapunov y dimensión de correlación) tan sólo señalar que Grassberger y Procaccia dan cuenta de una relación de potencia entre la integral de correlación y la dimensión del supuesto atractor sobre el que se genera la dinámica compleja. Del mismo modo, el exponente de Lyapunov mide la sensibilidad a las condiciones iniciales, característica consustancial a los sistemas dinámicos no lineales disipativos.

Para finalizar con este apartado dedicado a la metodología del uso del test BDS, señalar que cuando se está trabajando con series financieras para verificar la presencia de estructura no lineal en los datos, se suele emplear diagnóstico de "barajar los datos" (*shuffling diagnostic*) propuesto por Scheinkman y LeBaron (1989). Este procedimiento consiste en estudiar los residuos obtenidos de adaptarlos a un modelo AR(p), de acuerdo a la metodología de Brock, y entonces "barajar" los datos. Si los residuos son puramente aleatorios entonces la dimensión asociada a los residuos será aproximadamente igual a la dimensión de éstos tras el proceso de "barajarlos". En cambio, si son resultado de una dinámica no lineal caótica y por tanto tienen cierta estructura, entonces el proceso de "barajar" destruiría dicha estructura, de manera que la dimensión se incrementaría.

3. INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

Este apartado pretende de forma breve aclarar algunas ideas relativas a la interpretación que en algunas ocasiones se le han dado a los resultados obtenidos de este test.

En principio, podemos decir que es un test de independencia basado en la estimación de integrales de correlación para varias dimensiones. Tiene bastante potencia contra todo tipo de estructura lineal y no lineal (Dechert, 1988)[5].

Hemos visto que el test estadístico sigue asintóticamente una distribución normal con media cero y varianza unitaria, de modo que siendo un test no paramétrico resulta fácil de utilizar para evaluar de la hipótesis mantenida. No necesita de ningún tipo de supuesto acerca de la distribución, por ejemplo, no es preciso suponer la existencia de momentos de orden superior, como es el caso de otro tipo de test que comparten el mismo objetivo, en general que el BDS, tal es el caso biespectral de Hinich y Patterson (1990), entre otros.

Resulta conveniente señalar que el test tiene potencia, y a contrario de lo que se suele comentar, no sólo para dependencia no lineal determinista, sino también para dependencia no lineal estocástica. No es, por lo tanto, un test de caos propiamente dicho, esto, como decimos, es un hecho que en algunas ocasiones se toma como cierto[6].

[5] Este autor ofrece dos tipos de estructuras teóricas que no son detectadas, en la práctica esto no tiene relevancia.

[6] Kramer y Runde (1997) toman el test como si fuera directamente un test de caos.

El test BDS puede ayudar a identificar la existencia de dependencia no lineal, pero no su tipo[7]

Tal vez, uno de los hechos más significativos e innovadores de este test, es que se conforma como un test no-paramétrico (Tervarsita, 1990)

4. APLICACIÓN A ALGUNA SERIE CAÓTICA CONOCIDA.

Hemos aplicado el test BDS a los siguientes conjuntos de datos derivados de atractores caóticos sobradamente reconocidos. Tales han sido: el atractor de Lorenz, el de Henon y el Anosov. Todas las series han sido generadas con el programa PHASER, se desestimaron los 1000 primeros datos, con el objeto de deshacernos de la etapa transitoria, para asegurar que nos encontramos sobre el atractor caótico respectivo. El número de datos fueron 1500. A continuación, se ajustaron al mejor proceso autoregresivo mediante un programa generado en OX. Posteriormente, el test fue ejecutado sobre los residuos del ajustes autoregresivo. Los resultados esperados son el rechazo de la hipótesis nula, es decir, los datos serán no i.i.d.

La selección de la dimensión de la *m*-historia es tres y dos, y el épsilon es 1,5 veces la desviación típica de los datos. En la versión de E.views 4.0 es posible elegir conforme a distintos criterios es parámetro épsilon.

En el siguiente cuadro representamos los resultados

	m=2		**m=3**		**m=4**	
	Epsilon	BDS	*Epsilon*	BDS	*Epsilon*	BDS
Lorenz	*0,1927*	16,21	*0,1927*	17,44	*0,1927*	15,17
Henon	*0,2742*	12,28	*0,2742*	13,05	*0,2742*	10,2
Anosov	*0,3315*	0,659	*0,3315*	0,7451	*0,3315*	0,616

Para los atractores de Henon y Lorenz el test arroja los resultados previstos, es decir, no puede rechazar que son no-lineales. En cambio, para la dinámica del atractor Anosov, pese a ser no-lineal, detecta que es lineal, cuando no es así. Luego, se muestra evidencia

[7] De acuerdo a Brock (1991) y Hsieh (1991) es test no detecta residuos GARCH, sin saberse en la actualidad con no es capaz de detectar dicha estructura.

de que para alguna serie, ya se encuentra algún sistema que siendo no lineal el BDS no es capaz de detectarlo.

5. BIBLIOGRAFÍA

Brock, W. A., W. D. Dechert, and J. Scheinkman (1987). A test for independence based on the correlation dimension. Department of Economics, University of Wisconsin, University of Houston and University of Chicago. (Revised Version, 1991: Brock, W.A., W.D. Dechert, J. Scheinkman, and B.D. LeBaron)

Brock, W. A., W. D. Dechert, Scheinkman J, y B. LeBaron (1996). “A test for independence based on the correlation dimension”. Econometric Reviews 15(3):197-235.

Brock, W.A., (1986). “Distinguishing Random and Deterministic Systems: Abridge Version”. Journal of Economic Theory, 40. Págs, 168-195.

Dechert, D., (1988). “A characterization of Independence for a Gaussian Process in terms of the Correlation integral”. University of Wisconsin-Madison, SSRI working paper no.9412.

De Lima, P., (1992). “A test for IID Based upon the BDS Statistic”, John Hopkins Univesity, Baltimore, Department of Economics, working paper.

Grassbeger, P. Procaccia, I. (1983 a). “Characterization of Strange Attractors”. Physical Review Letters, vol 50, no. 5 (Enero), págs. 346-349.

Grassbeger, P. Procaccia, I. (1983 b). “Measuring Strangeness of Strange Attractors”, Physica D (Nonlinear Phenomena), vol. 9. Págs. 189-208.

Hinich, M, Patterson, D., (1990). "Relating Sample Bicovariances of a Process to the Parameters of a Quadratic nonlinear model". Applied Research Laboratories, University of Texas at Austin.

Hshie, D., (1991). "Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets", Journal of Finance. Vol. 46, no. 5. Págs. 1839-1877.

Kramer, W, y Runde, R., (1997), "Chaos and the Compass Rose", Economics Letters, vol. 54.no.3. Págs. 113-118.

Scheinkman, J., y LeBaron, B., (1989). "Nonlinear Dynamics and Stock Returns", Journal of Business. Vol. 63, no.3(julio). Págs. 311-337.

Takens, F., (1981). "Detecting Strange Attractors in Turbulence". Dynamical Systems and Turbulence. Eds Springer-Verlag. Págs. 366-381.

Serfling, R.J., (1980). Approximation Theorems of Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, New York.